Exercices d'oraux de la banque CCP 2014-2015 - Corrigés

BANQUE ANALYSE

EXERCICE 1

1) • Si on suppose que les suites (u_n) et (v_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang,

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Il existe alors un entier n_0 tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $\dfrac{u_n}{v_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$. En particulier, pour $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_n}{v_n} > 0$ et donc u_n et v_n ont même signe.

• Si on ne suppose pas que les suites (u_n) et (v_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned} u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n &\Rightarrow \exists\,(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\ u_n - v_n = \varepsilon_n v_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0 \\ &\Rightarrow \exists\,(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\ u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0. \end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $\varepsilon_n > -\dfrac{1}{2}$ et donc $1+\varepsilon_n > \dfrac{1}{2}$. En particulier, pour $n \geqslant n_0$, $1+\varepsilon_n > 0$.

Pour $n \geqslant n_0$, on a donc $u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n$ et $1+\varepsilon_n > 0$. Pour $n \geqslant 0$, on en déduit que

- si $v_n > 0$, alors $u_n > 0$,
- si $v_n < 0$, alors $u_n < 0$,
- si $v_n = 0$, alors $u_n = 0$.

Donc, pour $n \geqslant n_0$, u_n et v_n ont même signe.

2) Quand n tend vers $+\infty$,

$$\operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = -\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Donc, $\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{6n^3}$ et en particulier, à partir d'un certain rang, $\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) < 0$.

EXERCICE 2

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2(3-x)} = -\dfrac{1}{(x+1)^2(x-3)}$.

1) Il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$,

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-3}.$$

- $c = \lim\limits_{x\to3} (x-3)f(x) = -\dfrac{1}{(3+1)^2} = -\dfrac{1}{16}$.
- $b = \lim\limits_{x\to-1} (x+1)^2 f(x) = -\dfrac{1}{-1-3} = \dfrac{1}{4}$.
- $a + c = \lim\limits_{x\to+\infty} x f(x) = 0$ et donc $a = -c = \dfrac{1}{16}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\},\ f(x) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{1}{x-3}\right).}$$

f est continue sur $]-1, 3[$ en tant que fraction rationnelle définie sur $]-1, 3[$ et donc f admet des primitives sur $]-1, 3[$.
Les primitives de f sur $]-1, 3[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{16}\left(\ln(x+1) - \dfrac{4}{x+1} - \ln(3-x)\right) + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Une telle primitive s'annule en 1 si et seulement si $\dfrac{1}{16}\left(\ln(2) - \dfrac{4}{2} - \ln(2)\right) + \lambda = 0$ ou encore $\lambda = \dfrac{1}{8}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;3\},\ G(x) = \frac{1}{16}\left(\ln(x+1) - \frac{4}{x+1} - \ln(3-x) + 2\right).}$$

2) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{4}{(1+x)^2} + \frac{1}{3-x}\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{1+x} + 4\times\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{16}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + 4\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1)x^k + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{3^k}\right) + o\left(x^n\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{16}\left(\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k(4k+5) + \frac{1}{3^{k+1}}\right)x^k\right) + o\left(x^n\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{16}\left(\sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k(4k+5) + \frac{1}{3^{k+1}}\right)x^k\right) + o\left(x^n\right).}$$

3) $G^{(3)}(0) = (G')''(0) = f''(0)2!a_2 = 2! \times \frac{1}{16}\left((-1)^2(4\times 2+5) + \frac{1}{3^{2+1}}\right) = \frac{13\times 27+1}{8\times 27} = \frac{352}{8\times 27} = \frac{44}{27}$.

$$\boxed{G^{(3)}(0) = \frac{44}{27}.}$$

EXERCICE 3

1) • Montrons par récurrence que tout entier naturel k, g est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$.

- La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g^{(0)}(x) = e^{2x} = 2^0 e^{2x}$.
  La propriété à démontrer est donc vraie quand $k = 0$.
- Soit $k \geqslant 0$. Supposons que g est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$ et montrons que g est de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g^{(k+1)}(x) = 2^{k+1}e^{2x}$.
  La fonction $g^{(k)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ou encore la fonction g est de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g^{(k+1)}(x) = \left(g^{(k)}\right)'(x) = 2^k \times 2e^{2x} = 2^{k+1}e^{2x}.$$

On a montré par récurrence que tout entier naturel k, g est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$.

• Montrons par récurrence que tout entier naturel k, h est de classe C^k sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$.

- La fonction h est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ en tant que fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$,

$$h^{(0)}(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1(-1)^0 0!}{(1+x)^{1+0}}.$$

  La propriété à démontrer est donc vraie quand $k = 0$.
- Soit $k \geqslant 0$. Supposons que h est de classe C^k sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$ et montrons que h est de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $h^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(1+x)^{k+2}}$.
  La fonction $h^{(k)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ en tant que fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ou encore la fonction h est de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$h^{(k+1)}(x) = \left(h^{(k)}\right)'(x) = (-1)^k k! \frac{-(k+1)}{(1+x)^{k+2}} = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(1+x)^{k+2}}.$$

On a montré par récurrence que tout entier naturel k, h est de classe C^k sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$.

2) La fonction $f = g \times h$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ en tant que produit de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de LEIBNIZ, pour tout réel x

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} e^{2x} \times \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n! e^{2x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}} \\
&= \frac{n! e^{2x}}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!} (1+x)^{n-k} = \frac{n! e^{2x} (-1)^n}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^k}{k!} (1+x)^k.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = \frac{n! e^{2x} (-1)^n}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^k}{k!} (1+x)^k.}$$

3) Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, si f et g sont n fois dérivables sur I, alors $f \times g$ est n fois dérivable sur I et que

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

• Pour $n = 1$, si f et g sont dérivables sur I, alors fg est dérivable sur I et

$$(fg)' = fg' + f'g = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)} g^{(1-k)}.$$

La formule est donc vraie quand $n = 1$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que si f et g sont n fois dérivables sur I, alors $f \times g$ est n fois dérivable sur I et que

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

et montrons que si f et g sont $n+1$ fois dérivables sur I, alors $f \times g$ est $n+1$ fois dérivable sur I et que

$$(f \times g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.$$

Soient donc f et g deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I. En particulier, f et g sont n fois dérivables sur I et par hypothèse de récurrence, $f \times g$ est n fois dérivable sur I et $(f \times g)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)} g^{(n-k)}$ est dérivable sur I en tant que produit de fonctions dérivables sur I car $k \leqslant n$ et $n-k \leqslant n$ et donc $(f \times g)^{(n)}$ est dérivable sur I en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables sur I. Donc, $f \times g$ est $n+1$ fois dérivable sur I et

$$\begin{aligned}
(f \times g)^{(n+1)} &= \left((f \times g)^{(n)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-(k-1))} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + g^{(n+1)} \\
&= f^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + g^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, si f et g sont n fois dérivables sur I, alors $f \times g$ est n fois dérivable sur I et $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

EXERCICE 4

1) Théorème des accroissements finis.
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

2) Posons $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x)$.

Soit $x \in]x_0, b]$. Par hypothèse, f est continue sur $[x_0, x]$ et dérivable sur $]x_0, x[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c = c(x) \in]x_0, x[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c(x))$.
Puisque pour tout x de $]x_0, b]$, on a $x_0 < c(x) < x$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} c(x) = x_0$.
D'après le théorème de composition des limites, $f'(c(x))$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures. Ainsi, le taux $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite réelle quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures et

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell.$$

f est donc dérivable à droite en x_0 et $f'_d(x_0) = \ell$.
De même, en remplaçant l'intervalle $[x_0, x]$ par l'intervalle $[x, x_0]$ quand $x < x_0$, on montre que f est dérivable à gauche en x_0 et que $f'_g(x_0) = \ell$.

Finalement, f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f'(x)$.

3) Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

• Pour tout réel non nul x, $|g(x)| \leqslant x^2$. On en déduit que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g(x) = 0 = f(0)$. g est donc continue en 0. Puisque d'autre part, g est continue sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux, g est continue sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout réel non nul x, $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Pour tout réel non nul x, $\left|\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0}\right| \leqslant |x|$ et on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0$. Par suite, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

• g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel non nul x,

$$g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi}$ et $v_n = \dfrac{1}{2n\pi}$. Les suites u et v sont deux suites tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Mais $g'(u_n) = 2u_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et $g'(v_n) = -1$ tend vers -1 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la fonction g' n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Finalement, l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

EXERCICE 5

1) (a) Supposons $\alpha \leqslant 0$. Pour tout $n \geqslant 3$,

$$u_n = \frac{1}{n}(\ln n)^{-\alpha} \geqslant \frac{1}{n}(\ln 3)^{-\alpha} \geqslant \frac{1}{n}.$$

Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge, la série de terme général u_n diverge.

(b) Supposons $\alpha > 0$. Pour $x > 1$, posons $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$. Les deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto (\ln x)^\alpha$ sont positives et croissantes sur $]1, +\infty[$ et donc la fonction $x \mapsto x(\ln x)^\alpha$ est croissante sur $]1, +\infty[$. Mais alors, f_α est décroissante sur $]1, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction strictement positive et croissante sur $]1, +\infty[$.

1er cas. Supposons $\alpha \in]0, 1]$. Pour tout $k \geqslant 3$, $(\ln k)^\alpha \leqslant \ln k$ (par croissante de la fonction $x \mapsto (\ln k)^x$ puisque $\ln k \geqslant 1$) puis $\dfrac{1}{k(\ln k)^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{k \ln k}$. Puisque la fonction f_1 est continue et décroissante sur $]1, +\infty[$, pour $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} &\geqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k \ln k} \geqslant \sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x}\, dx \\ &= \int_3^{n+1} \frac{1}{x \ln x}\, dx = (n+1)\left(\ln(n+1) - 1\right) - 3(\ln 3 - 1).\end{aligned}$$

Puisque $(n+1)\left(\ln(n+1) - 1\right) - 3(\ln 3 - 1)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha}$ et donc la série de terme général u_n diverge.

2ème cas. Supposons $\alpha \in]1, +\infty[$. Pour tout $k \geqslant 3$, on a $[k-1, k] \subset]1, +\infty[$. Puisque f_α est continue et décroissante sur $]1, +\infty[$, pour $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha} &\leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\, dx = \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{(\alpha-1)(\ln x)^{\alpha-1}}\right]_2^n = \frac{1}{(\alpha-1)(\ln 2)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)(\ln n)^{\alpha-1}} \\ &\leqslant \frac{1}{(\alpha-1)(\ln 2)^{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

Ainsi, chaque u_n est positif et la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=3}^{n} u_k\right)_{n \geqslant 3}$ est majorée. On en déduit que la série de terme général u_n converge.

En résumé,

$$\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$$

2) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \underset{n \to +\infty}{=} e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \underset{n \to +\infty}{=} e \times e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n \to +\infty}{=} e\left(1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$. Par suite,

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{=} e - e\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{e}{2n},$$

puis

$$\frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln\left(n^2 + n\right)\right)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\frac{e}{2n} \times 1}{\left(\ln\left(n^2\right)\right)^2} = \frac{e}{8n \ln^2(n)}.$$

Puisque $2 > 1$, la série converge d'après la question 1).

EXERCICE 7

1) Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives et équivalentes.
Il existe une suite (ε_n) telle que pour tout entier naturel n, $v_n = u_n(1 + \varepsilon_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$.

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$, il existe un rang n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $-\dfrac{1}{2} \leqslant \varepsilon_n \leqslant \dfrac{1}{2}$. Pour $n \geqslant n_0$, on a $\dfrac{1}{2} u_n \leqslant v_n \leqslant \dfrac{3}{2} u_n$ ou encore, plus explicitement,

$$\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 2v_n \text{ et } 0 \leqslant v_n \leqslant \frac{3}{2} u_n \leqslant 2u_n.$$

Si la série de terme général u_n converge, il en est de même de la série de terme général $2u_n$ puis de la série de terme général v_n.
Si la série de terme général v_n converge, il en est de même de la série de terme général $2v_n$ puis de la série de terme général u_n.

En résumé, la série de terme général u_n converge si et seulement si la série de terme général v_n converge. Ceci montre que les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n sont de même nature.

2) Pour $n \geqslant 2$, posons $u_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)\ln n}$.

$u_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{3/2}\ln n} > 0$. Donc la série de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{n^{3/2}\ln n}$.

Ensuite, $\dfrac{1}{n^{3/2}\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ et puisque $\dfrac{3}{2} > 1$, la série de terme général v_n converge. On en déduit que la série de terme général u_n converge et il en est de même de la série de terme général $\dfrac{(i-1)\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)\ln n}$

EXERCICE 42

1) Sur $]0,+\infty[$, l'équation (H) est équivalente à l'équation $y' - \dfrac{3}{2x}y = 0$. La fonction $x \mapsto -\dfrac{3}{2x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et donc les solutions de (H) sur $]0,+\infty[$ constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

Soit f une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (H) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ f'(x) - \frac{3}{2x}f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x > 0,\ e^{-\frac{3}{2}\ln x}f'(x) - \frac{3}{2x}e^{-\frac{3}{2}\ln x}f(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ \left(\frac{f}{x^{3/2}}\right)'(x) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0,\ \frac{f(x)}{x^{3/2}} = \lambda\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0,\ f(x) = \lambda x^{3/2}.
\end{aligned}$$

Les solutions de (H) sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda x^{3/2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) • Sur $]0,+\infty[$, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' - \dfrac{3}{2x}y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Les fonctions $x \mapsto -\dfrac{3}{2x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sont continues sur $]0,+\infty[$ et donc les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1.

Soit f une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ f'(x) - \frac{3}{2x}f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow \forall x > 0,\ e^{-\frac{3}{2}\ln x}f'(x) - \frac{3}{2x}e^{-\frac{3}{2}\ln x}f(x) = \frac{e^{-\frac{3}{2}\ln x}}{2\sqrt{x}}\\
&\Leftrightarrow \forall x > 0,\ \left(\frac{f}{x^{3/2}}\right)'(x) = \frac{1}{2x^2} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0,\ \frac{f(x)}{x^{3/2}} = -\frac{1}{2x} + \lambda\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x > 0,\ f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} + \lambda x^{3/2}.
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto -\dfrac{\sqrt{x}}{2} + \lambda x^{3/2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Soit f une éventuelle solution de (E) sur $[0,+\infty[$. Nécessairement, $f(0) = 0$ (égalité fournie par (E)) et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0$, $f(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{2} + \lambda x^{3/2}$ ou encore, nécessairement

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \geqslant 0,\ f(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} + \lambda x^{3/2}.$$

Réciproquement, une telle fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et solution de (E) sur $]0,+\infty[$ et d'autre, si elle est dérivable en 0 à droite, vérifie encore (E) pour $x=0$. Donc, une telle fonction est solution de (E) sur $[0,+\infty[$ si et seulement si elle est dérivable en 0 à droite. Mais pour tout réel λ, $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ et on en déduit que f n'est pas dérivable en 0 à droite.

L'équation (E) n'admet pas de solution sur $[0,+\infty[$.

EXERCICE 43

1) (a) Le signe d'un réel x est défini par $\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x<0 \\ 0 \text{ si } x=0 \\ 1 \text{ si } x>0 \end{cases}$.

La fonction $x \mapsto \text{Arctan}(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tout entier naturel n

$$\text{sgn}\left(u_{n+2}-u_{n+1}\right) = \text{sgn}\left(\text{Arctan}\left(u_{n+1}\right) - \text{Arctan}\left(u_n\right)\right) = \text{sgn}\left(u_{n+1}-u_n\right).$$

La suite $\left(u_{n+1}-u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de signe constant ou encore la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Déterminons précisément le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de x_0.

Pour $x\in\mathbb{R}$, Posons $f(x) = x - \text{Arctan}(x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $f(0)=0$, f est strictement négative sur $]-\infty,0[$ et strictement positive sur $]0,+\infty[$. On en déduit que

- $\forall x>0$, $\text{Arctan}(x) < x$,
- $\forall x<0$, $\text{Arctan}(x) > x$,
- $\forall x\in\mathbb{R}$, $(\text{Arctan}(x) = x \Leftrightarrow x=0)$.

On en déduit encore que

- si $u_0>0$, alors $u_1<u_0$ et donc la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante,
- si $u_0<0$, alors $u_1>u_0$ et donc la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante,
- si $u_0=0$, alors $u_1=u_0$ et donc la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

(b) Pour tout entier naturel non nul n, $|u_n| = \left|\text{Arctan}\left(u_{n-1}\right)\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Donc pour tout entier naturel n, $|u_n| \leqslant \text{Max}\left\{|u_0|, \dfrac{\pi}{2}\right\}$. La suite u est donc bornée et monotone. On en déduit que la suite u est convergente. Soit ℓ la limite de la suite u. Par continuité de la fonction Arctan sur $\mathbb{R}$ et donc en ℓ,

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \text{Arctan}\left(u_n\right) = \text{Arctan}\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = \text{Arctan}(\ell).$$

ℓ est donc un point fixe de la fonction $x\mapsto \text{Arctan}(x)$. L'étude de la fonction f effectuée en a) montre alors que $\ell=0$.

On a montré que pour tout réel x_0, la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite 0.

2) Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x) = h\left(\text{Arctan}\, x\right)$.
Soit $x_0\in\mathbb{R}$. Soit u la suite définie par $u_0=x_0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}\left(u_n\right)$ puis v la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = h\left(u_n\right)$. Alors, pour tout entier naturel n,

$$v_n = h\left(u_n\right) = h\left(\text{Arctan}\left(u_n\right)\right) = h\left(u_{n+1}\right) = v_{n+1}.$$

La suite v est donc constante et en particulier convergente, de limite $v_0 = h\left(x_0\right)$. D'autre part, d'après la question 1), la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite 0. Maintenant, la fonction h sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier continue en 0. On en déduit que

$$h\left(x_0\right) = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} h\left(u_n\right) = h\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = h(0).$$

Ainsi, pour tout réel x, $h(x) = h(0)$ et donc la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, les fonctions constantes conviennent.

Les fonctions solutions sont les fonctions constantes.

EXERCICE 47

1) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit φ_n la fonction en escaliers sur $[a, b]$ définie par

$$\forall x \in [a,b],\ \varphi_n(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \text{ si } x \in \left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right[,\ k \in [\![1,n]\!] \\ f(b) \text{ si } x = b \end{cases}.$$

Alors, $R_n(f) = \displaystyle\int_a^b \varphi_n(x)\ dx$. Si f est positive, $R_n(f)$ est la somme des aires des rectangles $\left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right] \times \left[0, f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right]$ et plus généralement si f est de signe quelconque, $R_n(f)$ est l'aire algébrique du domaine compris entre l'axe des abscisses et le graphe de φ_n.

(b) Supposons f de classe C^1 sur $[0, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\ dx - R_n(f) &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\ dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\ dx - \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\ dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) dx,\end{aligned}$$

puis $\left|\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx - R_n(f)\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| dx$. Puisque la fonction f est de classe C^1 sur le segment $[0, 1]$, la fonction f' est définie et bornée sur ce segment. Soit M un majorant de la fonction $|f'|$ sur ce segment. On sait que l'inégalité des accroissements finis permet d'affirmer que la fonction f est M-lipschitzienne sur le segment $[0, 1]$. Par suite

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\ dx - R_n(f)\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M\left|x - \frac{k}{n}\right| dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{M}{n} dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{n^2} = \frac{M}{n}.\end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{M}{n} = 0$, on a montré que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(x)\ dx$.

2) Pour tout entier naturel non nul n,

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{3n^2 + k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2} \times \frac{1}{3 + \dfrac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3 + \left(\dfrac{k}{n}\right)^2}.$$

On applique alors le 1) à la fonction f définie sur $[0, 1]$ par : $\forall x \in [0, 1],\ f(x) = \dfrac{1}{3 + x^2}$. f est continue sur $[0, 1]$ et donc la suite (x_n) converge et

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \int_0^1 \frac{dx}{3 + x^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3n^2 + k^2} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.}$$

EXERCICE 55

1) Vérifions que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- La suite nulle est dans E.
- Soient $(u, v) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Pour tout entier naturel n

$$\begin{aligned}(\lambda u+\mu v)_{n+2} &= \lambda u_{n+2}+\mu v_{n+2} = \lambda\left(2au_{n+1}+4(ia-1)u_n\right)+\mu\left(2av_{n+1}+4(ia-1)v_n\right)\\ &= 2a\left(\lambda u_{n+1}+\mu v_{n+1}\right)+4(ia-1)u_n\left(\lambda u_n+\mu v_n\right) = 2a\left(\lambda u+\mu v\right)_{n+1}+4(ia-1)u_n\left(\lambda u+\mu v\right)_n,\end{aligned}$$

et donc $\lambda u+\mu v\in E$.

On a montré que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Montrons que $\dim_{\mathbb{C}}(E)=2$. Pour cela, considérons $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{C}^2 \\ u & \mapsto & (u_0,u_1)\end{array}$ et montrons que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

• φ est une application de E dans $\mathbb{C}^2$. Soient $(u,v)\in E^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$.

$$\varphi\left(\lambda u+\mu v\right)=\left(\lambda u_0+\mu v_0,\lambda u_1+\mu v_1\right)=\lambda\left(u_0,u_1\right)+\mu\left(v_0,v_1\right)=\lambda\varphi(u)+\mu\varphi(v).$$

Donc, φ est une application linéaire de E vers $\mathbb{C}^2$.

• Soit $u\in E$ tel que $\varphi(u)=0$. On a donc $u_0=u_1=0$. Mais alors, par récurrence double, pour tout entier naturel n, on a $u_n=0$ et donc la suite u est nulle. Ceci montre que φ est injective.

• Soit $(a,b)\in\mathbb{C}^2$. Soit u la suite définie par $u_0=a$, $u_1=b$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=2au_{n+1}+4(ia-1)u_n$. u est un élément de E tel que $\varphi(u)=(a,b)$. Ceci montre que φ est surjective.

Finalement, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On en déduit que $\dim_{\mathbb{C}}(E)=\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}^2\right)=2$.

2) L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence est

$$z^2-2az+4(1-ia)=0 \quad (E_c).$$

Le discriminant réduit de cette équation est

$$\Delta'=a^2-4(1-ia)=a^2+4ia-4=(a+2i)^2.$$

1er cas. Si $a\neq-2i$, (E_c) admet deux solutions distinctes à savoir $z_1=a-(a+2i)=-2i$ et $z_2=a+(a+2i)=2(a+i)$. On sait alors que les éléments de E sont les suites de la forme

$$\left(\lambda(-2i)^n+\mu(2(a+i))^n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2.$$

De plus, d'après les formules de Cramer,

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l}u_0=1\\ =u_1=1\end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=1\\ (-2i)\lambda+2(a+i)\mu=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \lambda=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2(a+i)\end{vmatrix}}{2(a+2i)} \text{ et } \mu=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2i & 1\end{vmatrix}}{2(a+2i)}\\ &\Leftrightarrow \lambda=\frac{2a-1+2i}{2(a+2i)} \text{ et } \mu=\frac{1+2i}{2(a+2i)}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } a\neq-2i,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{2(a+2i)}\left((2a-1+2i)(-2i)^n+(1+2i)(2(a+i))^n\right).}$$

2ème cas. Si $a=-2i$, (E_c) admet une solution double à savoir $z=-2i$. On sait alors que les éléments de E sont les suites de la forme

$$\left((\lambda n+\mu)(-2i)^n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2.$$

De plus,

$$\left\{\begin{array}{l}u_0=1\\ =u_1=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mu=1\\ (-2i)(\lambda+\mu)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \lambda=-1+\frac{i}{2} \text{ et } \mu=1.$$

$$\boxed{\text{Si } a=-2i,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\left(\left(-1+\frac{i}{2}\right)n+1\right)(-2i)^n.}$$

EXERCICE 56

1) La fonctions $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$ est continue sur $]1,+\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $]1,+\infty[$ et ne s'annulant pas sur $]1,+\infty[$. Soit F une primitive de f sur $]1,+\infty[$. F est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$.

Soit $x>1$. Alors $1<x<x^2$ et donc $H(x)=\displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\ dt$ existe. De plus, $H(x)=F\left(x^2\right)-F(x)$.
La fonction $x\mapsto x^2$ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ à valeurs dans $]1,+\infty[$ et la fonction F est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$. Donc la fonction $x\mapsto F\left(x^2\right)$. est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$. Mais alors, H est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ en tant que combinaisons linéaires de fonctions de classe C^1 sur $]1,+\infty[$. De plus, pour tout $x>1$,

$$H'(x)=2xF'\left(x^2\right)-F'(x)=2xf\left(x^2\right)-2f(x)=\frac{2x}{\ln\left(x^2\right)}-\frac{1}{\ln x}=\frac{x-1}{\ln x}.$$

$$\boxed{H \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]1,+\infty[\text{ et pour tout } x\in]1,+\infty[,\ H'(x)=\frac{x-1}{\ln x}.}$$

2) Pour $x>1$, posons $h=x-1$ ou encore $x=1+h$ de sorte que x tend vers 1 par valeurs supérieures si et seulement si h tend vers 0 par valeurs supérieures.

$$\begin{aligned}
u(x)&=\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{\ln(1+h)}-\frac{1}{h}\\
&\underset{h\to0}{=}\frac{1}{h-\dfrac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)}-\frac{1}{h}\underset{h\to0}{=}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{1-\dfrac{h}{2}+o\left(h\right)}-1\right)\underset{h\to0}{=}\frac{1}{h}\left(1+\frac{h}{2}+o(h)-1\right)\\
&\underset{h\to0}{=}\frac{1}{2}+o(1).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to1}u(x)=\frac{1}{2}.}$$

3) La fonction u est donc prolongeable par continuité en 1 en posant $u(1)=\dfrac{1}{2}$ (on note encore u le prolongement obtenu).

Soit $x>1$.

$$\begin{aligned}
H(x)&=\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\ dt=\int_x^{x^2}\left(u(t)+\frac{1}{t-1}\right)\ dt=\int_x^{x^2}u(t)\ dt+\int_x^{x^2}\frac{1}{t-1}\ dt\\
&=\int_x^{x^2}u(t)\ dt+[\ln(t-1)]_x^{x^2}=\int_x^{x^2}u(t)\ dt+\ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)\\
&=\int_x^{x^2}u(t)\ dt+\ln(x+1).
\end{aligned}$$

Puisque u est définie et continue sur $[1,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\int_x^{x^2}u(t)\ dt=\int_1^1 u(t)\ dt=0$ et d'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\ln(x+1)=\ln(2)$. Donc,

$$\boxed{\lim_{x\to1^+}H(x)=\ln(2).}$$

